

## Πρώτο τεστ Απειροστικός Λογισμός 1

### Διάρκεια 2 Ώρες

**Στοιχειοθεσία:** Δήμογλου Κωνσταντίνος, Μαθηματικός (Msc)

#### **Θέμα 1**

Να απαντήσετε αν οι ακόλουθοι ισχυρισμοί είναι αληθείς ή ψευδείς με πλήρη αιτιολόγηση.

- (i) Το σύνολο  $\{1 - \frac{1}{2n} : n \in \mathbb{N}\}$  έχει ελάχιστο και μέγιστο στοιχείο.
- (ii) Για τα σύνολα  $A = \{x \in \mathbb{Q} : -\sqrt{2} < x \leq \sqrt{2}\}$  και  $B = \{x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : \sqrt{2} \leq x\}$  υπάρχουν τα  $\sup A$  και  $\inf B$  και είναι ίσα μεταξύ τους.
- (iii) Έστω  $A$  και  $B$  δύο μη κενά υποσύνολα του  $\mathbb{R}$  για τα οποία ισχύει:

$$\forall x \in A \text{ και } y \in B : x < y.$$

Τότε, υπάρχει  $\epsilon > 0$  ώστε  $\sup A < \inf B - \epsilon$ .

- (iv) Υπάρχουν  $m, n \in \mathbb{N}$  ώστε  $2020 < \sqrt{2} \frac{m}{n} < 2021$ .

- (v) Το σύνολο  $A = \left\{ \frac{2x-1}{x^2+1} : x \in \mathbb{R} \right\}$  είναι φραγμένο.

- (vi) Αν  $A \subseteq \mathbb{R}$  και  $a = \inf A$ , τότε για κάθε  $\epsilon > 0$ , υπάρχει  $x \in A$  έτσι ώστε  $a < x < a + \epsilon$ .

#### **Θέμα 2**

Θεωρούμε το (διπαραμετρικό) σύνολο  $A = \left\{ \frac{1}{n^2} + \frac{1}{m^3} : n, m \in \mathbb{N} \right\}$ . Να υπολογίσετε το  $\inf A$  με χρήση του ε-χαρακτηρισμού του infimum, αφού πρώτα αιτιολογήσετε την ύπαρξή του. Έχει το σύνολο  $A$  ελάχιστο στοιχείο;

#### **Θέμα 3**

Αποδείξτε ότι για κάθε  $n \in \mathbb{N}$  και  $a_1, \dots, a_n \in (0, 1)$  ισχύει:

$$1 - (a_1 + \dots + a_n) \leq (1 - a_1) \dots (1 - a_n).$$

#### **Θέμα 4**

- (i) Έστω  $\emptyset \neq A \subseteq \mathbb{R}$  άνω φραγμένο σύνολο και έστω  $a \in \mathbb{R}$ . Ορίζουμε το σύνολο

$$a + A = \{a + x : x \in A\}.$$

Να αποδείξετε ότι  $\sup(a + A) = a + \sup A$ .

- (ii) Αποδείξτε ότι για κάθε  $x, y \in \mathbb{R}$  υπάρχουν  $m \in \mathbb{Z}$  και  $n \in \mathbb{N}$  ώστε  $x < \frac{m}{2^n} < y$ .

ΚΑΛΗ ΤΥΧΗ!!